第3講　複素数と円

3

［A］　複素数平面上の原点以外の相異なる2点P(α)，Q(β)を考える．P(α)，Q(β)を通る直線をl，原点からlに引いた垂線とlの交点をR(w)とする．ただし，複素数γが表す点CをC(γ)とかく．このとき，

「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，P(α)，Q(β)が中心A$\left(\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$の円周上にあることである.」

を示せ.

［B］　複素数平面上の点a_1，a_2，…，a_n，…を

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく．ただし，iは虚数単位である.

(1)　3点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ.

(2)　すべての点b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と円

3　a，b を $|a| \neq |b|$，$a \neq 0$ を満たす実数定数とし，複素数 z に対して

$$w = \frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

とする．

(1)　z が単位円上の点であるとき，w は点 $\alpha = 1$ を中心とする半径 1 の円周上の点であることを示せ．

(2)　z が単位円の内部の点であるとき，w が $\alpha = 1$ を中心とする半径 1 の円の外部の点であるための a，b の条件を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と円

3

［A］　複素数平面上の原点以外の相異なる２点 $\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を考える．$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $\mathrm{R}(w)$ とする．ただし，複素数 γ が表す点 C を $\mathrm{C}(\gamma)$ とかく．このとき，

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである.」

を示せ.

［B］　複素数平面上の点 a_1，a_2，…，a_n，… を

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく．ただし，i は虚数単位である.

(1)　３点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ.

(2)　すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ.

【答】［A］　略

［B］ (1) 中心 $\dfrac{1}{2}$，半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(2) 略

【解説】

［A］　題意より $w(w-\alpha)\neq 0$ のとき $\mathrm{OR}\perp\mathrm{RP}$ より

$$\alpha-w=\frac{|\alpha-w|}{|w|}(\mp i)\cdot(0-w)$$

$$\iff\ |w|(\alpha-w)=\pm|\alpha-w|wi\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．これは $w(w-\alpha)=0$ のときにも成立する.

同様に

$$|w|(\beta-w)=\pm|\beta-w|wi\quad\cdots\cdots②$$

も成り立つ.

(I)　$w=\alpha\beta$ のとき

$$\begin{aligned} ①\ &\iff\ |\alpha\beta|(\alpha-\alpha\beta)=\pm|\alpha-\alpha\beta|\alpha\beta i \\ &\iff\ |\alpha||\beta|\alpha(1-\beta)=\pm|\alpha||1-\beta|\alpha\beta i \\ &\iff\ |\beta|(1-\beta)=\pm|1-\beta|\beta i\quad\cdots\cdots③ \end{aligned}$$

$\beta\neq 0$ より

$$③\ \iff\ 1-\beta=\frac{|1-\beta|}{|\beta|}(\mp i)(0-\beta)$$

となるので $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{B}(1)$ とおくと

$$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{BQ}$$

であることがわかる．よって Q は OB を直径とする円周上の点．よって $\beta=1$ の場合と

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

あわせても Q は中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点である．同様に

$$② \iff |\alpha|(1-\alpha)=\pm|1-\alpha|\alpha i$$

より P も中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点である．

(Ⅱ)　α，β が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上の点のとき，$\alpha\neq0$ より

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)\ (-\pi<\theta<\pi)$$

と表せるが

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)i\\&=\cos^2\frac{\theta}{2}+\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)i\\&=\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

より $\phi\neq\theta$，$-\pi<\phi<\pi$ なる ϕ を用いて

$$\beta=\cos\frac{\phi}{2}\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

と表せる．ここで $\alpha\beta\neq0$ より

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\alpha\beta}{0-\alpha\beta}&=-\frac{1}{\beta}+1\\&=-\frac{1}{\cos\dfrac{\phi}{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\phi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right\}+1\\&=\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)i\end{aligned}$$

より 0 と $\alpha\beta$，$\alpha\beta$ と α を結ぶ線分は直角である．同様に

$$\beta-\alpha\beta=\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)i\cdot(-\alpha\beta)$$

が得られるが

$$\alpha-\alpha\beta=\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)i\cdot(-\alpha\beta)$$

より

$$\beta-\alpha\beta=k(\alpha-\alpha\beta)\ (k \text{ は実数})$$

と表せるので，α，β，$\alpha\beta$ は同一直線上に存在する．よって $w=\alpha\beta$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)　$a_1=1,\ a_2=i,\ a_3=1+i,\ a_4=1+2i$ より

$$b_1=i,\ b_2=1-i,\ b_3=\frac{3+i}{2}$$

ここで

$$\frac{b_2-b_3}{b_1-b_3}=\frac{(1-i)-\frac{3+i}{2}}{i-\frac{3+i}{2}}=\frac{-1-3i}{-3+i}=i$$

であるから $b_1b_2b_3$ は $\angle b_1b_3b_2=\frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形.

よって中心 $\frac{b_1+b_2}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$，半径$=\frac{|b_1-b_2|}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

(2)
$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \iff \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n} \iff b_n=\frac{1}{b_{n+1}-1}$$

ここで(1)より $n\geqq 3$ について

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\quad \cdots\cdots①$$

が成り立つと仮定すると

$$
\begin{aligned}
① &\iff \left|\frac{1}{b_{n+1}-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\\
&\iff |3-b_{n+1}|=\sqrt{5}\,|b_{n+1}-1|\\
&\iff 9-3b_{n+1}-3\overline{b_{n+1}}+b_{n+1}\overline{b_{n+1}}\\
&\qquad\qquad =5(b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-b_{n+1}-\overline{b_{n+1}}+1)\\
&\iff b_{n+1}\overline{b_{n+1}}-\frac{1}{2}b_{n+1}-\frac{1}{2}\overline{b_{n+1}}-1=0\\
&\iff \left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{4}\\
&\iff \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{5}{4}\\
&\therefore\quad \left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

よって帰納的に題意は示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数と円

3　a，b を $|a|\neq|b|$，$a\neq0$ を満たす実数定数とし，複素数 z に対して

$$w=\frac{(a+b)(z+1)}{az+b}$$

とする．

(1)　z が単位円上の点であるとき，w は点 $\alpha=1$ を中心とする半径１の円周上の点であることを示せ．

(2)　z が単位円の内部の点であるとき，w が $\alpha=1$ を中心とする半径１の円の外部の点であるための a，b の条件を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $|a|>|b|$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
& w=\frac{(a+b)(z+1)}{az+b} \\
\iff\ & w=\frac{a+b}{a}+\frac{(a+b)(a-b)}{a(az+b)} \\
\iff\ & aw-(a+b)=\frac{(a+b)(a-b)}{az+b} \\
\iff\ & az+b=\frac{(a+b)(a-b)}{aw-(a+b)} \\
\iff\ & z=\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}
\end{aligned}$$

これを $|z|=1$ に代入すると

$$\begin{aligned}
& |z|=1 \\
\iff\ & \left|\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}\right|=1 \\
\iff\ & |bw-(a+b)|=|aw-(a+b)| \\
\iff\ & \{bw-(a+b)\}\{b\overline{w}-(a+b)\} \\
& \quad =\{aw-(a+b)\}\{a\overline{w}-(a+b)\} \\
\iff\ & b^2w\overline{w}-b(a+b)\overline{w}-b(a+b)w+(a+b)^2 \\
& \quad =a^2w\overline{w}-a(a+b)\overline{w}-a(a+b)w+(a+b)^2 \\
\iff\ & (a-b)(a+b)w\overline{w}-(a-b)(a+b)\overline{w} \\
& \qquad -(a-b)(a+b)w=0 \\
\iff\ & w\overline{w}-\overline{w}-w=0 \\
\iff\ & (w-1)(\overline{w}-1)=1 \\
\iff\ & |w-1|=1
\end{aligned}$$

よって，示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　(1)と同様に

$$
\begin{aligned}
& |z|<1 \\
\iff & \left|\frac{-bw+(a+b)}{aw-(a+b)}\right|<1 \\
\iff & (a-b)(a+b)(w\overline{w}-\overline{w}-w)>0 \\
\iff & (a^2-b^2)(|w-1|^2-1)>0
\end{aligned}
$$

ここで $|w-1|>1$ であるためには

$$a^2-b^2>0 \qquad \therefore \quad |\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。